Corrigé du E.M.D. N°2 en Statistiques

Promotion: $1^{ère}$ Année Sciences Vétérinaires (2006–2007)

Exercice 1 (05 P^{ts}). A l'oral d'un examen, un étudiant doit répondre à 8 questions sur un total de 10.

1. Combien de choix possibles y a t'il ?
2. Combien de choix possibles y a t'il s'il doit répondre aux 3 premières questions ?
3. S'il doit répondre au moins à 4 des 5 premières questions ?

Solution:

1. Choix possibles: $m = C_{10}^{8} = 45$. (1,5 Pts)
2. Puisque 3 des 8 questions sont choisis, il lui reste à choisir 5 questions parmi les 7 questions qui restes: $m = C_7^5 = 21$. (1,5 Pts)
3. Il doit répondre à 4 des 5 premières questions ou à 5 sur les 5 premières questions : $m = C_5^4 C_5^4 + C_5^5 C_5^3 = 35$. (2 Pts)

Exercice 2 (05 P^{ts}). Dans une population, 45% d'individus sont vaccinés contre la fièvre jaune, 60% sont vaccinés contre la diphtérie, et 30% sont vaccinés contre les deux maladies.

- Quelle est la probabilité pour un individu choisi au hasard de n'être vacciné contre aucune de ces deux maladies ?

Solution:
Prenant un individu par hasard et soit
$F =$ "La personne est vacciné contre la fièvre jaune"
$D =$ "La personne est vacciné contre diphtérie"

$$P(F) = 0.45,\ P(D) = 0.60,\ P(F \cap D) = 0.3 \qquad \text{((0,5+0,5+1)Pts=2Pts)}$$

Puisque

$$\bar{F} \cap \bar{D} = \overline{F \cup D} \qquad \text{(1,5 Pts)}$$

alors

$$\begin{aligned} P(\bar{F} \cap \bar{D}) &= P(\overline{F \cup D}) \\ &= 1 - P(F \cup D) = 1 - [P(F) + P(D) - P(F \cap D)] = 0.25 \ (1,5\text{Pts}) \end{aligned}$$

Exercice 3 (05 P^{ts}). Parmi 300 personnes atteintes d'une maladie M on a dénombré 200 fumeurs. Par ailleurs, on a observé 30% de fumeurs dans un échantillon représentatif de l'ensemble de la population.

- Calculer le risque relatif d'étre atteint de la maladie M pour les fumeurs par rapport au non fumeurs ($\frac{\text{La probabilité qu'un fumeur soit atteint de la maladie M}}{\text{La probabilité qu'un non-fumeur soit atteint de la maladie M}}$).

Solution:
Prenant une personne par hasard et soit
$M =$ "La personne est atteinte de la maladie M"
$F =$ "La personne est fumeur"
On a

$$P(F/M) = \frac{200}{300} = \frac{2}{3},\ P(F) = 0.3 \qquad ((0{,}5+0{,}5)\text{Pts})$$

de plus

$$\begin{aligned} P(\overline{F}/M) &= 1 - P(F/M) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\ (0,5Pts) \\ P(\overline{F}) &= 1 - P(F) = 1 - 0.3 = 0.7\ (0,5Pts) \end{aligned}$$

La probabilité qu'un fumeur soit atteint de la maladie M

$$P(M/F) = \frac{P(M\cap F)}{P(F)} = \frac{P(F/M)P(M)}{P(F)} \qquad (1\text{ Pts})$$

La probabilité qu'un non-fumeur soit atteint de la maladie M

$$P(M/\overline{F}) = \frac{P(M\cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{P(\overline{F}/M)P(M)}{P(\overline{F})} \qquad (1\text{Pts})$$

Le risque relatif d'étre atteint de la maladie M pour les fumeurs par rapport au non-fumeurs est égal à

$$\frac{P(M/F)}{P(M/\overline{F})} = \frac{\frac{P(F/M)P(M)}{P(F)}}{\frac{P(\overline{F}/M)P(M)}{P(\overline{F})}} = \frac{\frac{P(F/M)}{P(F)}}{\frac{P(\overline{F}/M)}{P(\overline{F})}} = \frac{P(F/M)P(\overline{F})}{P(\overline{F}/M)P(F)} = \frac{\frac{2}{3}0.7}{\frac{1}{3}0.3} = 4,666 \qquad (1\text{ Pts})$$

Exercice 4 (05 P^{ts}). Soit f une fonction réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type σ_X.

Corrigé du EMD N°2 en Statistiques

Solution:

1. Puisque

   (a)
   $$e^{-x} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{(1 Pts)}$$

   (b)
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1 \qquad \text{(1 Pts)}$$

   donc f est une loi de probabilité.

2 L'espérance mathématique

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx = -(1+x)e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1 \text{ (1Pts)} \\
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x}dx = \\
&= -(2+2x+x^2)e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 2 \text{ (1Pts)} \\
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow \sigma_X = 1 \text{ (1Pts)}
\end{aligned}$$